El Modelo Neoclásico de Crecimiento

Mauricio Tejada

ILADES - Universidad Alberto Hurtado

Segundo Semestre 2018

Introducción

Introducción

- El modelo neoclásico de crecimiento es el modelo más importante en la macroeconomía moderna.
- Es la base de una serie de modelos utilizado tanto para estudiar temas de crecimiento como de ciclos económicos.
- En este curso estudiaremos una versión en tiempo discreto de este modelo.
- ¿En que nos concentraremos?
  - El Modelo de crecimiento (equilibrio competitivo y asignación centralizada)
  - Control óptimo
  - Programación dinámica.

Los Hechos Estilizados de Kaldor (1957)

El modelo de crecimiento debe ser consistente con los datos. *Nicholas Kaldor en 1957 resumió las propiedades estadísticas del proceso de crecimiento de EEUU.*

- La participación en el ingreso del capital y del trabajo es más o menos constante.
- La tasa de crecimiento del capital por trabajador es más o menos constante.
- La tasa de crecimiento del producto por trabajador es más o menos constante.
- El ratio capital-producto es más o menos constante
- La tasa de retorno a la inversión es más o menos constante.
- Los salarios reales crecen en el tiempo.

Estructura Básica del Modelo

Existen muchas versiones del modelo neoclásico de crecimiento. La versión básica tiene los siguiente ingredientes:

1. La economía esta poblada por familias son idénticas que viven para siempre.
2. Las empresas producen un único bien utilizado capital y trabajo.
3. Todos los agentes son tomadores de precios.
4. Los precios son completamente flexibles y los mercados se clarean en todo momento.

Iniciamos el análisis suponiendo que existe un **Planificador Central** que asigna los recursos

Asignación Centralizada

Demografía

- La economía está poblada por un continuo (número muy grande) de familias.
- Todas las familias son idénticas (supuesto fuerte, quizá más de lo que necesitamos. Veremos más adelante algo sobre agregación).
- Como consecuencia podemos pensar en una familia representativa tomadora de precios.
- Las familias están situadas en el intervalo $[0,1]$, por tanto las variables medidas en términos per cápita son idénticas a los agregados.
- El número de personas en cada hogar crece a tasa n. Entonces $L_t = (1+n)L_{t-1} = (1+n)^t L_0$. Normalizamos $L_0 = 1$.

Preferencias

- Las preferencias están definidas sobre flujos de consumo y pueden ser representadas por una función de utilidad.
- Función de utilidad de la familia representativa:

$$U_0\left(c_0, c_1, ..., c_T\right) = \sum_{t=0}^{T} \beta^t L_t u\left(c_t\right)$$

  donde T en principio puede ser finito (mas adelante continuaremos con T infinito), $c_t = \frac{C_t}{L_t}$ es el consumo per cápita y $\beta = \frac{1}{1+\rho} \in (0,1)$ es el factor de descuento (ρ la tasa).
- Propiedades de la función de utilidad $U_0(\cdot) = \sum_{t=0}^{T} \beta^t L_t u\left(c_t\right)$
  - $U_0(\cdot)$ es separable aditivamente.
  - $U_0(\cdot)$ tiene tasa de descuento constante.

  Supuestos aseguran *recursividad* y un *comportamiento temporalmente consistente*

Preferencias

- Propiedades de la función de utilidad instantánea $u\left(c_t\right)$: $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$:
  - Estrictamente creciente $u'(c) > 0$ y estrictamente cóncava $u''(c) < 0$.
  - $u'\left(0\right) = +\infty$.
- Algunos Ejemplos:
  - Si $U_0\left(\cdot\right) = \left(\alpha_0 c_0^{1-\theta} + \alpha_1 c_1^{1-\theta} + ... + \alpha_T c_T^{1-\theta}\right)^{\frac{1}{1-\theta}}$ (función de utilidad CES), entonces:
$$u\left(c_t\right) = \frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma}, \quad \sigma \neq 1$$
  - Si $U_0\left(\cdot\right) = \left(c_0^{\alpha_0} c_1^{\alpha_1} ... c_T^{\alpha_T}\right)$ (función de utilidad Cobb-Douglas), entonces:
$$u\left(c_t\right) = \log\left(c_t\right)$$

- Cada la familia esta dotada de una unidad de trabajo y k_0 unidades del bien en $t = 0$.

Tecnología

- La tecnología de producción es neoclásica y está dada por:
$$Y_t = F(K_t, L_t, A_t)$$
donde $F : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$ is una función de producción estacionaria, continua y dos veces diferenciable.

- $F(\cdot)$ satisface las siguientes propiedades:
  1. Retornos constantes a escala en K_t y L_t:
$$F(\mu K, \mu L, A) = \mu F(K, L, A), \quad \forall \mu > 0$$
  2. Productos marginales positivos pero decrecientes:
$$F_K(K, L, A) > 0, \quad F_L(K, L, A) > 0,$$
$$F_{KK}(K, L, A) < 0, \quad F_{LL}(K, L, A) < 0.$$

Tecnología

- $F(\cdot)$ satisface las siguientes propiedades:
  3. Condiciones de Inada:

$$\lim_{K\to 0} F_K(\cdot) = \infty \quad y \quad \lim_{K\to\infty} F_K(\cdot) = 0 \text{ para todo } L > 0 \text{ y todo } A$$
$$\lim_{L\to 0} F_L(\cdot) = \infty \quad y \quad \lim_{L\to\infty} F_L(\cdot) = 0 \text{ para todo } K > 0 \text{ y todo } A.$$

- Implicaciones:
  1. $F(\cdot)$ satisface (Teorema de Euler):

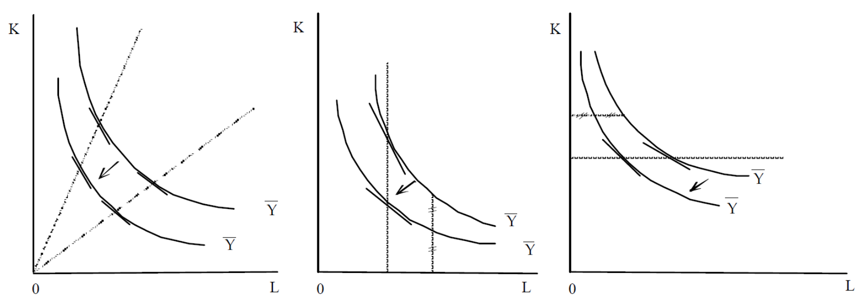
$$F(K, L, A) = F_K(K, L, A) \times K + F_L(K, L, A) \times L$$

  con $\epsilon_X = \frac{\partial F}{\partial X}\frac{X}{F}$.
  2. $F_K(\cdot)$ y $F_L(\cdot)$ son homogéneas de grado cero (sólo dependen del ratio $\frac{K}{L}$).
  3. Todos los insumos son esenciales: $F(0, L, A) = F(K, 0, A) = 0$.
  4. $F_{KL}(\cdot) > 0$, capital y trabajo son complementos.

Tecnología

Progreso Tecnológico:

- Neutral a la Hicks: $A_t F(K_t, L_t)$
- Neutral a la Solow (aumentador de capital): $F(A_t K_t, L_t)$
- Neutral a la Harrod (aumentador de trabajo): $F(K_t, A_t L_t)$



Hicks Solow Harrod

A_t es un proceso tecnológico aumentador de trabajo (neutral a la Harrod). Es el único que garantiza K_t/Y_t constante (Hechos estilizados de Kaldor)

Tecnología

- Forma intensiva (trabajo-efectivo): $\hat{k}_t = K_t/A_tL_t$, $\hat{y}_t = Y_t/A_tL_t$, etc.

$$\hat{y}_t = f(\hat{k}_t) = F(\hat{k}_t)$$

- Productividades marginales:

$$\begin{aligned} F_K(K_t, A_tL_t) &= f_k(\hat{k}_t) \\ F_L(K_t, A_tL_t) &= A\left[f(\hat{k}_t) - f_k(\hat{k}_t)\hat{k}_t\right] \end{aligned}$$

- Propiedades de la función de producción en su forma intensiva:

$$\begin{aligned} &f(0) = 0, \quad f_k(\hat{k}_t) > 0 > f_{kk}(\hat{k}_t) \\ &\lim_{\hat{k}\to 0} f_k\left(\hat{k}_t\right) = \infty, \quad \lim_{\hat{k}\to\infty} f_k\left(\hat{k}_t\right) = 0 \end{aligned}$$

Tecnología

- Algunos ejemplos:
  - Función de producción CES:

$$F(K_t, A_tL_t) = \left(\alpha K_t^{1-\theta} + (1-\alpha)\left(A_tL_t\right)^{1-\theta}\right)^{\frac{1}{1-\theta}}$$

    y en su forma intensiva:

$$f(\hat{k}_t) = \left(\alpha \hat{k}_t^{1-\theta} + (1-\alpha)\right)^{\frac{1}{1-\theta}}$$

  - Función de Producción Cobb-Douglas:

$$F(K_t, A_tL_t) = K_t^{\alpha}\left(A_tL_t\right)^{1-\alpha}$$

    y en su forma intensiva:

$$f(\hat{k}_t) = \hat{k}_t^{\alpha}$$

- La tecnología crece a una tasa g: $A_t = (1+x)A_{t-1} = (1+x)^t A_0$. Normalizamos $A_0 = 1$.

Tecnología

- Restricción de Recursos:
$$C_t + I_t \leq Y_t$$
En forma intensiva:
$$\hat{c}_t + \hat{i}_t \leq \hat{y}_t$$

- El capital se deprecia a una tasa constante $\delta \in [0,1]$. La ley de movimiento de capital es:
$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t$$
En forma intensiva:
$$\begin{aligned}(1+n)(1+x)\hat{k}_{t+1} &= (1-\delta)\hat{k}_t + \hat{i}_t \\ g_L g_A \hat{k}_{t+1} &= (1-\delta)\hat{k}_t + \hat{i}_t\end{aligned}$$

El Problema del Planificador Central

- Consideremos el plan óptimo que elegiría un planificador central benevolente (también se puede pensar en una economía Robinson Crusoe).
- El problema de optimización de Ramsey:
$$\begin{aligned}\max_{\left\{c_t, \hat{k}_{t+1}\right\}_{t=0}^{T}} \quad & \sum_{t=0}^{T} [\beta g_L]^t \, u(c_t) \\ s.t. \quad & \\ & c_t g_A^{-t} + g_L g_A \hat{k}_{t+1} \leq f\left(\hat{k}_t\right) + (1-\delta)\hat{k}_t, \\ & c_t \geq 0, \hat{k}_{t+1} \geq 0, \\ & \hat{k}_0 \ \text{ dado}.\end{aligned}$$
donde de nuevo T puede ser finito o ∞.
- Este es un ejemplo de un *problema secuencial* ya que la solución es una secuencia de números $\left\{c_t^*, \hat{k}_{t+1}^*\right\}_{t=0}^{T}$.

El Problema del Planificador Central

- Solución para T finito: Problema de programación cóncava de dimensión finita ($\mathbb{R}^T$) caracterizado por el teorema de Kuhn-Tucker.
- Solución para T infinito: Podemos usar al menos dos métodos para resolver este problema:
  - Método 1: Método de Lagrange (basado en una versión generalizada de teorema de Kuhn-Tucker)
  - Método 2: Programación Dinámica.

Control Óptimo: Horizonte Finito

- El Lagrangiano es:

$$\ell_0 = \sum_{t=0}^{T} \beta^t \left[u\left(c_t\right) g_L^t + \lambda_t \left(f\left(\hat{k}_t\right) + (1-\delta)\hat{k}_t - c_t g_A^{-t} - g_L g_A \hat{k}_{t+1} \right) + \mu_t c_t + \omega_{t+1} \hat{k}_{t+1} \right]$$

- Las CPO:

$$\begin{aligned}
u'\left(c_t\right) g_L^t - \lambda_t g_A^{-t} + \mu_t &= 0 \qquad t = 0, ..., T \\
-\lambda_t g_L g_A + \beta \lambda_{t+1} \left[f'(\hat{k}_{t+1}) + 1 - \delta \right] + \omega_{t+1} &= 0 \qquad t = 0, ..., T-1 \\
-\lambda_T g_L g_A + \omega_{T+1} &= 0 \qquad t = T \\
\lambda_t \left[f\left(\hat{k}_t\right) + (1-\delta)\hat{k}_t - c_t g_A^{-t} - g_L g_A \hat{k}_{t+1} \right] &= 0 \qquad t = 0, ..., T \\
\mu_t c_t &= 0 \qquad t = 0, ..., T \\
\omega_{t+1} \hat{k}_{t+1} &= 0 \qquad t = 0, ..., T
\end{aligned}$$

Control Óptimo: Horizonte Finito

Proposición

Suponga que $F(K_t, A_t L_t)$ *es neoclásica y que* $u(c_t)$ *es estrictamente creciente, estrictamente cóncava y satisface* $u'(0) = +\infty$*. Entonces, las condiciones necesarias para alcanzar el máximo en el problema de Ramsey son:*

$$\frac{u'(c_t)}{\beta u'(c_{t+1})} = f'(\hat{k}_{t+1}) + 1 - \delta \qquad t = 0, ..., T-1$$

$$g_L g_A \hat{k}_{t+1} = f\left(\hat{k}_t\right) + (1-\delta)\hat{k}_t - c_t g_A^{-t} \qquad t = 0, ..., T$$

$$\beta^T u'(c_T) k_{T+1} = 0$$

con k_0 *dado. La solución es interior (*$\lambda_t > 0$*,* $\mu_t = 0$ *y* $\omega_{t+1} = 0$*).*

Control Óptimo: Horizonte Finito

- *Interpretation* de la ecuación de Euler: suponga que reducimos consumo hoy para destinar a la inversión:

$$\underbrace{u'(c_t)}_{\text{utilidad marginal costo del ahorro}} = \beta \underbrace{u'(c_{t+1})}_{\text{incremento en la utilidad en } t+1 \text{ por unidad de } c_{t+1}} \underbrace{\left(f'(\hat{k}_{t+1}) + 1 - \delta\right)}_{\text{Retorno de la inversión: incremento en } c_{t+1}}$$

- *Interpretación del multiplicador*: suponga que aumentamos el stock de capital en t.

$$\lambda_t = u'(c_t)\, g_L^t g_A^t$$

- La condición terminal es $k_{T+1} = 0$. De manera equivalente, el valor presente del capital debe ser cero en el período final

$$\beta^T u'(c_T)\, k_{T+1} = 0$$

Resolvemos un sistema de $2T+1$ ecuaciones con dos condiciones sobre el capital (una inicial k_0 y una final $k_{T+1} = 0$).

Control Óptimo: Horizonte Infinito

- Condiciones para la generalización de las condiciones de Kuhn-Tucker: (1) la utilidad debe ser recursiva y (2) el problema debe estar acotado por arriba.
- Utilidad recursiva:

$$U_t = u(c_t) + \beta U_{t+1}, \quad \beta \in (0,1)$$

  En cada período la utilidad sólo depende del flujo de consumo en ese período.
- Problema acotado por arriba:

$$U_t < \infty \text{ para cada posible } \{c_t\}_{t=0}^{\infty}$$

  Esto se cumple si $\frac{u(c_{t+s+1})}{u(c_{t+s})} < \frac{1}{\beta g_L}$ para $s = 0, 1, ...$
- En el modelo neoclásico de crecimiento el problema está acotado dada la característica limitada de los recursos (k_0 finito).

Control Óptimo: Horizonte Infinito

- El Lagrangiano es:

$$\ell_0 = \sum_{t=0}^{T} \beta^t \Big[u(c_t)\, g_L^t + \lambda_t \left(f\left(\hat{k}_t\right) + (1-\delta)\hat{k}_t - c_t g_A^{-t} - g_L g_A \hat{k}_{t+1} \right) + \mu_t c_t + \omega_{t+1} \hat{k}_{t+1} \Big]$$

  Note que:

$$H_t = u(c_t)\, g_L^t + \lambda_t \left(f\left(\hat{k}_t\right) + (1-\delta)\hat{k}_t - c_t g_A^{-t} - g_L g_A \hat{k}_{t+1} \right) + \mu_t c_t + \omega_{t+1} \hat{k}_{t+1}$$

  Entonces:

$$\ell_o = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t H_t$$

  y por tanto también tiene una estructura recursiva:

$$\ell_t = H_t + \beta \ell_{t+1}$$

Control Óptimo: Horizonte Infinito

Lema

Si $\{c_t, \hat{k}_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ *es óptima y* $(\lambda_t, \mu_t, \omega_{t+1})$ *son los multiplicadores asociados a las restricciones, entonces:*

$$c_t = argmax_{c_t} H_t$$

tomando $(\hat{k}_t, \hat{k}_{t+1})$ *como dado y,*

$$\hat{k}_{t+1} = argmax_{k_{t+1}} H_t + \beta H_{t+1}$$

tomando $(\hat{k}_t, \hat{k}_{t+2})$ *como dado.*

- Las CPO de la solución interior son:

$$\begin{aligned} u'(c_t)\, g_L^t - \lambda_t g_A^{-t} &= 0 \\ -\lambda_t g_L g_A + \beta \lambda_{t+1} \left[f'(\hat{k}_{t+1}) + 1 - \delta \right] &= 0 \\ f\left(\hat{k}_t\right) + (1-\delta)\hat{k}_t - c_t g_A^{-t} - g_L g_A \hat{k}_{t+1} &= 0 \end{aligned}$$

Control Óptimo: Horizonte Infinito

- Cuando $T = \infty$ la condición terminal $\beta^T u'(c_T)\, k_{T+1} = 0$ es reemplazada por la condición de transversalidad (CTV):

$$\lim_{t\to\infty} \underbrace{\beta^t u'(c_t)}_{\substack{\text{Costo descontado en términos} \\ \text{de utilidad de incrementar} \\ \text{1 unidad de capital}}} \underbrace{k_{t+1}}_{\substack{\text{Cantidad total} \\ \text{de capital}}} = 0$$

- *Interpretación de la CTV*: el valor total descontado del capital al infinito debe tender a cero a medida que se aproxima el final de los tiempos.
- Comparando con el problema en horizonte finito:
  - Forma funcional idéntica.
  - Diferente condición terminal.

Control Óptimo: Horizonte Infinito

Proposición

Suponga que la función de utilidad es recursiva, que $u(c_t)$ *es estrictamente creciente, estrictamente cóncava y satisface* $u'(0) = +\infty$*, y que* $F(K_t, A_t L_t)$ *es neoclásica. Entonces, las codiciones necesarias para alcanzar el máximo en el problema de Ramsey con horizonte infinito son:*

$$
\begin{aligned}
\frac{u'(c_t)}{u'(c_{t+1})} &= \beta\left[f'(\hat{k}_{t+1}) + 1 - \delta\right] \\
g_L g_A \hat{k}_{t+1} &= f\left(\hat{k}_t\right) + (1-\delta)\hat{k}_t - c_t g_A^{-t} \\
\lim_{t\to\infty} \beta^t u'(c_t) k_{t+1} &= 0
\end{aligned}
$$

con $\hat{k}_0$ *dado.*

Equilibrio Competitivo

Equilibrio Competitivo

- Familias y empresas interactúan de manera descentralizada.
- La estructura del modelo es:
  - Preferencias, dotaciones y tecnología son las mismas que en el modelo anterior.
  - Agregamos mercados: mercados de bienes y mercados de factores (donde se arrienda trabajo y capital).
- Caracterizamos ahora la asignación en un contexto de mercados competitivos (tanto en el mercado de bienes como el de factores).
- Mostraremos que la asignación del equilibrio competitivo coincide con la del planificador central (pareto optimalidad).

Familias

- Existen muchas dinastías que viven al infinito: $j \in [0, 1]$. Normalizamos $L_0 = 1$.
- El número de personas en cada hogar crece a tasa n. Entonces $L_t^j = (1+n)^t = g_L^t$.
- Definamos c_t^j, k_t^j, e i_t^j como variables por persona en cada familia.
- Cada persona en la familia esta dotada de una unidad de trabajo y la ofrece inelásticamente a w_t.
- Cada miembro de la familia j esta dotado de un capital inicial de k_0^j y acumula capital de acuerdo a:

$$g_L k_{t+1}^j = (1-\delta)k_t^j + i_t^j$$

  Cada familia recibe una renta (bruta) q_t por arrendar el capital.

Familias

- La familia j tiene participación en la propiedad de las empresas. Definamos como π_t^j a los dividendos recibidos (por persona).
  - Las acciones no se intercambian y por tanto la familia j tiene una fracción constante α^j de las empresas: $\pi_t^j = \alpha^j \Pi_t / L_t$ y $\int \alpha^j dj = 1$.
- Ingreso por persona de la familia j (usos y fuentes) es:

$$c_t^j + i_t^j = y_t^j = w_t + q_t k_t^j + \pi_t^j$$

  Las familias toman los precios w_t y q_t como dados.
- Por tanto (tomando RCE $\Pi_t = 0$):

$$c_t^j + g_L k_{t+1}^j = (1 + q_t - \delta) k_t^j + w_t$$

Familias

- El problema de las familias es elegir la secuencia$\{c_t^j, k_{t+1}^j\}_{t=0}^{\infty}$ dada la secuencia $\{q_t, w_t\}_{t=0}^{\infty}$ y las restricciones de recursos y no negatividad.

$$\max_{\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t g_L^t u(c_t^j)$$
$$s.a c_t^j + g_L k_{t+1}^j = (1 + q_t - \delta) k_t^j + w_t$$
$$k_0^j \, dado$$

- El Lagrangiano (para la solución interior) es:

$$\ell_0^j = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[g_L^t u(c_t^j) + \lambda_t^j ((1 + q_t - \delta) k_t^j + w_t - c_t^j - g_L k_{t+1}^j) \right]$$

Familias

- Las CPO para la solución interior son:

$$
\begin{aligned}
\frac{u'(c_t^j)}{\beta u'(c_{t+1}^j)} &= (1 + q_{t+1} - \delta) \\
c_t^j + g_L k_{t+1}^j &= (1 + q_t - \delta) k_t^j + w_t
\end{aligned}
$$

- La condición de transversalidad:

$$\lim_{t \to \infty} \beta^t u'(c_t^j) k_{t+1}^j = 0$$

Firmas

- En cada período t existe un numero arbitrariamente grande de firmas M_t. Cada firma es indexada con $m \in [0, M_t]$.
- El bien es homogéneo, los mercados son competitivos (de bienes y de factores) y la tecnología es neoclásica.
- La tecnología es aumentadora de trabajo: $A_t = (1+x)^t = g_A$.
- El beneficio de la firma m es:

$$\Pi_t^m = F(K_t^m, A_t L_t^m) - q_t K_t^m - w_t L_t^m$$

- La inversión es reversible y no existen costos de ajuste: optimización estática. C.P.O.

$$
\begin{aligned}
F_K(K_t^m, A_t L_t^m) &= q_t \\
F_L(K_t^m, A_t L_t^m) A_t &= w_t
\end{aligned}
$$

Firmas

- Homogeneidad de grado cero en los productos marginales implica que w_t y q_t son consistentes (i.e. tienen el mismo ratio $X_t = K_t^m / A_t L_t^m$).

$$\begin{aligned} q_t &= f'(X_t) \\ w_t &= (f(X_t) - f'(X_t) X_t) A_t \end{aligned}$$

  Entonces, C.P.O. solo identifica X_t (mientras K_t^my $A_t L_t^m$ están indeterminados).
- Combinado ambas condiciones de primer orden:

$$q_t X_t + \frac{w_t}{A_t} = f(X_t)$$

  Lo que implica:

$$\Pi_t^m = A_t L_t^m \left[f(X_t) - q_t X_t - \frac{w_t}{A_t} \right] = 0$$

Clareo de Mercado

- Mercado de capital:

$$\int_0^{M_t} K_t^m dm = \int_0^1 g_L^t k_t^j dj = K_t$$

- Mercado de trabajo:

$$\int_0^{M_t} L_t^m dm = \int_0^1 g_L^t dj = L_t$$

Equilibrio

Definición (Equilibrio Competitivo)

El equilibrio de la economía es la asignación $\left\{(k^j_{t+1}, c^j_t)_{j\in[0,1]}, (K^m_t, L^m_t)_{m\in[0,M_t]}\right\}_{t=0}^{\infty}$ y la trayectoria de precios $\{q_t, w_t\}_{t=0}^{\infty}$ tal que:

1. Dado $\{q_t, w_t\}_{t=0}^{\infty}$, la trayectoria $\left\{(k^j_{t+1}, c^j_t)_{j\in[0,1]}\right\}_{t=0}^{\infty}$ maximiza la utilidad de la familia j (para todo j).
2. $\left\{(K^m_t, L^m_t)_{m\in[0,M_t]}\right\}_{t=0}^{\infty}$ maximizan beneficios para cada m y t.
3. Los mercados de capital y trabajo se clarean.

Equilibrio

- Note que $X_t = \hat{k}_t$ y por tanto

$$\begin{aligned} q_t &= f'(\hat{k}_t) \\ w_t &= \left[f(\hat{k}_t) - f'(\hat{k}_t)\hat{k}_t\right] g_A^t \end{aligned}$$

- Dados los precios, se satisfacen $c^j_t = c_t$ para todo j:

$$\frac{u'(c_t)}{u'(c_{t+1})} = \beta(f'(\hat{k}_{t+1}) + 1 - \delta)$$

- Integrando la restricción presupuestaria de las familias y reemplazando precios de factores:

$$c_t + g_L k_{t+1} = (1 + f'(\hat{k}_t) - \delta)k_t + \left[f(\hat{k}_t) - f'(\hat{k}_t)\hat{k}_t\right] g_A^t$$
$$c_t g_A^{-t} + g_L g_A \hat{k}_{t+1} = f(\hat{k}_t) + (1-\delta)\hat{k}_t$$

Equilibrio

Proposición

El conjunto de asignaciones del equilibrio competitivo coincide con aquellas encontradas para el Planificador Central. Luego, el equilibrio competitivo es Pareto óptimo.

- Nota sobre la condición de transversalidad:

$$\lim_{t\to\infty} \beta^t u'(c_t)k_{t+1} = 0$$

Definimos como $Q_{t+1} = f'(\hat{k}_{t+1}) + 1 - \delta$ al retorno bruto del capital. Se puede mostrar (usando la ecuación de Euler) que:

$$\beta^t u'(c_t) = \frac{u'(c_0)}{\prod_{s=1}^{t} Q_s}$$

Luego:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{k_{t+1}}{\prod_{s=1}^{t} Q_s} = 0$$

Equilibrio de Estado Estacionario

Estado Estacionario

Definición (Estado Estacionario)

Definimos estado estacionario como una situación (de equilibrio de *largo plazo*) en la cual varias cantidades crecen a tasa constante (incluida tasa cero).

- Usemos $u(c_t) = \frac{c_t^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}$. Con esto las CPO son:

$$\begin{aligned} \frac{g_A^{\sigma} u'(\hat{c}_t)}{\beta u'(\hat{c}_{t+1})} &= \left[f'(\hat{k}_{t+1}) + 1 - \delta\right] \\ g_L g_A \hat{k}_{t+1} &= f\left(\hat{k}_t\right) + (1-\delta)\hat{k}_t - \hat{c}_t \end{aligned}$$

- El estado estacionario se define como el nivel $\hat{k}^*$ tal que, si $\hat{k}_0 = \hat{k}^*$ entonces $\hat{k}_t = \hat{k}^*$ para todo $t \geq 1$.

$$\hat{c}^* = f\left(\hat{k}^*\right) + (1 - \delta - g_L g_A)\hat{k}^*$$

- Esto implica que:

$$\begin{aligned} f'(\hat{k}^*) &= g_A^{\sigma}/\beta + \delta - 1 \\ \hat{y}^* &= f(\hat{k}^*) \end{aligned}$$

Estado Estacionario

- En estado estacionario las variables expresadas en términos de trabajo efectivo no crecen. Las variables expresadas en términos per cápita crecen a tasa constante (**senda de crecimiento balanceado**):

$$\begin{aligned} c_t^* &= \hat{c}_t^* g_A^t = \hat{c}^*(1+x)^t \\ k_t^* &= \hat{k}_t^* g_A^t = \hat{k}^*(1+x)^t \\ y_t^* &= \hat{y}_t^* g_A^t = \hat{y}^*(1+x)^t \end{aligned}$$

- El retorno del capital es constante y el salario crece a tasa constante.

$$\begin{aligned} q^* &= f'(\hat{k}^*) \\ w_t^* &= \left[f(\hat{k}^*) - f'(\hat{k}^*)\hat{k}^*\right](1+x)^t \end{aligned}$$

- Finalmente, el ratio capital-producto es constante:

$$\frac{k_t^*}{y_t^*} = \frac{\hat{k}^*(1+x)^t}{\hat{y}^*(1+x)^t} = \frac{\hat{k}^*}{\hat{y}^*}$$

Estado Estacionario

- Finalmente, recodemos que:

$$q_t\hat{k}_t + \frac{w_t}{A_t} = f(\hat{k}_t)$$

y por tanto, en estado estacionario:

$$\%IngCapital^* = \frac{f'(\hat{k}^*)\hat{k}^*}{f(\hat{k}^*)}$$
$$\%IngTrabajo^* = \frac{\left[f(\hat{k}^*) - f'(\hat{k}^*)\hat{k}^*\right]}{f(\hat{k}^*)}$$

son constantes.

- *La senda de crecimiento balanceado es consistente con los hechos estilizados de Kaldor.*

Dinámica de Transición

Dinámica de Transición

- En el corto (mediano) plazo, la transición al equilibrio de largo plazo tiene que ser también óptima.
- Para analizar la dinámica de la transición definimos:

$$\begin{aligned} \hat{c}_t = \hat{c}_{t+1} \quad &: \quad \beta g_A^{-\sigma}\left[f'(\hat{k}_{t+1}) + 1 - \delta\right] = 1 \\ \hat{k}_t = \hat{k}_{t+1} \quad &: \quad \hat{c}_t = f(\hat{k}_t) + (1 - \delta - g_A g_L)\,\hat{k}_t \\ \hat{k}_{t+1} = 0 \quad &: \quad \hat{c}_t = f(\hat{k}_t) + (1-\delta)\hat{k}_t \end{aligned}$$

- Nota:
  - La primera ecuación se satisface en el estado estacionario del consumo.
  - La segunda ecuación se satisface en el estado estacionario del capital.
  - La tercera ecuación representa el máximo consumo posible.
- Estamos buscando la analogía a un diagrama de fase.

Dinámica de Transición

- En A_1 y A_2: fijemos $\bar{\hat{k}} > \hat{k}^*$

$$\frac{u'(\hat{c}_t)}{u'(\hat{c}_{t+1})} = \beta g_A^{-\sigma}(1 + f'(\bar{\hat{k}}) - \delta) < 1\,(ss) \Rightarrow u'(\hat{c}_{t+1}) > u'(\hat{c}_t) \Rightarrow \hat{c}\downarrow$$

- En A_3 y A_4: fijemos $\bar{\hat{k}} < \hat{k}^*$

$$\frac{u'(\hat{c}_t)}{u'(\hat{c}_{t+1})} = \beta g_A^{-\sigma}(1 + f'(\bar{\hat{k}}) - \delta) > 1\,(ss) \Rightarrow u'(\hat{c}_{t+1}) < u'(\hat{c}_t) \Rightarrow \hat{c}\uparrow$$

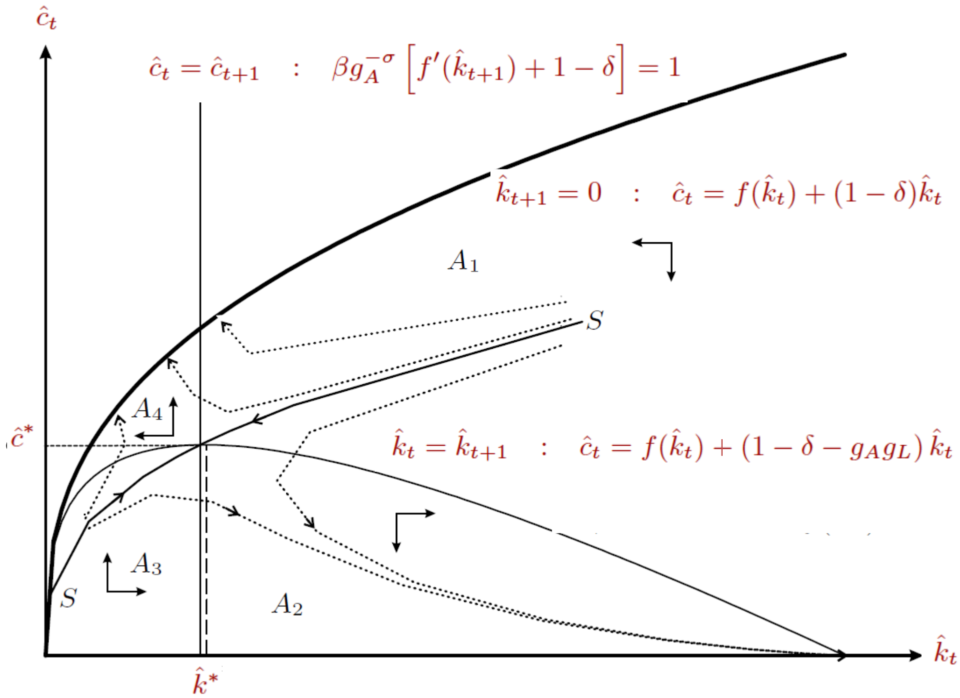
- En A_3 y A_2: fijemos $\bar{\hat{c}} < \hat{c}^*$

$$\hat{k}_{t+1} - \hat{k}_t = f(\hat{k}_t) + (1 - \delta - g_A g_L)\,\hat{k}_t - \bar{\hat{c}} > 0\,(ss) \Rightarrow \hat{k}\uparrow$$

- En A_4 y A_1: fijemos $\bar{\hat{c}} > \hat{c}^*$

$$\hat{k}_{t+1} - \hat{k}_t = f(\hat{k}_t) + (1 - \delta - g_A g_L)\,\hat{k}_t - \bar{\hat{c}} < 0\,(ss) \Rightarrow \hat{k}\downarrow$$

Dinámica de Transición



Método de Perturbación

Sistemas de Ecuaciones en Diferencias No Lineales

- Recuerde que la solución del problema de optimización es una secuencia $\left\{\hat{c}_t, \hat{k}_{t+1}\right\}_{t=0}^{\infty}$ que satisface:

$$\begin{aligned}\frac{g_A^{\sigma} u'\left(\hat{c}_t\right)}{\beta u'\left(\hat{c}_{t+1}\right)} &- \left[f'(\hat{k}_{t+1}) + 1 - \delta\right] = 0 \\ g_L g_A \hat{k}_{t+1} &- f\left(\hat{k}_t\right) - (1-\delta)\hat{k}_t + \hat{c}_t = 0\end{aligned}$$

- Este es un *sistema de ecuaciones en diferencias no lineales.*
- *Los* **métodos de Perturbación** usan información local (el estado estacionario) para obtener las funciones que caracterizan la secuencia óptima.
  - Factorización de Shur: Resolver un sistema de ecuaciones en diferencias lineal usando una aproximación de Taylor.
  - Aproximación de la Funciones de Política: Aproximar linealmente las funciones de política.
- Recuerde además que en estado estacionario se cumple:

$$\begin{aligned}\frac{g_A^{\sigma}}{\beta} &- \left[f'(\hat{k}^*) + 1 - \delta\right] = 0 \\ \hat{c}^* &- f\left(\hat{k}^*\right) - (1 - \delta - g_L g_A)\hat{k}^* = 0\end{aligned}$$

Método de Perturbación basado en la Factorización de Schur

- Usamos el principio de Taylor para linealizar el sistema de ecuaciones en diferencias alrededor del estado estacionario.
- Definamos $\tilde{c}_{t+i} = (\hat{c}_{t+i} - \hat{c}^*)$ y $\tilde{k}_{t+i} = (\hat{k}_{t+i} - \hat{k}^*)$):

$$\left\{\begin{array}{c} g_L g_A \hat{k}^* + g_L g_A \tilde{k}_{t+1} - f(\hat{k}^*) - f'(\hat{k}^*)\tilde{k}_t \\ -(1-\delta)\hat{k}^* - (1-\delta)\tilde{k}_t + c^* + \hat{c}_t \end{array}\right\} = 0$$

$$\left\{\begin{array}{c} g_A^{\sigma} u'(\hat{c}^*) + g_A^{\sigma} u''(\hat{c}^*)\tilde{c}_t - \beta u'(\hat{c}^*)\left[f'(\hat{k}^*) + 1 - \delta\right] \\ -\beta u''(\hat{c}^*)\left[f'(\hat{k}^*) + 1 - \delta\right]\tilde{c}_{t+1} - \beta u'(\hat{c}^*) f''(\hat{k}^*)\tilde{k}_{t+1} \end{array}\right\} = 0$$

- Alternativamente:

$$\begin{aligned} g_L g_A \tilde{k}_{t+1} - \frac{g_A^{\sigma}}{\beta}\tilde{k}_t + \tilde{c}_t &= 0 \\ g_A^{\sigma} u''(\hat{c}^*)\tilde{c}_t - g_A^{\sigma} u''(\hat{c}^*)\tilde{c}_{t+1} - \beta u'(\hat{c}^*) f''(\hat{k}^*)\tilde{k}_{t+1} &= 0 \end{aligned}$$

Método de Perturbación basado en la Factorización de Schur

- En términos matriciales:

$$\begin{bmatrix} g_L g_A & 0 \\ -\beta u' f'' & -g_A^\sigma u'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{k}_{t+1} \\ \hat{c}_{t+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -g_A^\sigma/\beta & 1 \\ 0 & g_A^\sigma u'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{k}_t \\ \hat{c}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Resolviendo:

$$\begin{bmatrix} \hat{k}_{t+1} \\ \hat{c}_{t+1} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} g_L g_A & 0 \\ -\beta u' f'' & -g_A^\sigma u'' \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -g_A^\sigma/\beta & 1 \\ 0 & g_A^\sigma u'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{k}_t \\ \hat{c}_t \end{bmatrix}$$

- Entonces:

$$\begin{bmatrix} \hat{k}_{t+1} \\ \hat{c}_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{g_A^\sigma}{\beta g_L g_A} & -\frac{1}{g_L g_A} \\ -\frac{u' f''}{u'' g_L g_A} & 1 + \frac{\beta u' f''}{g_L g_A^{\sigma+1} u''} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{k}_t \\ \hat{c}_t \end{bmatrix}$$

Método de Perturbación basado en la Factorización de Schur

- En general:

$$\hat{x}_{t+1} = J\hat{x}_t$$

- Estabilidad: Los autovalores de J satisfacen:

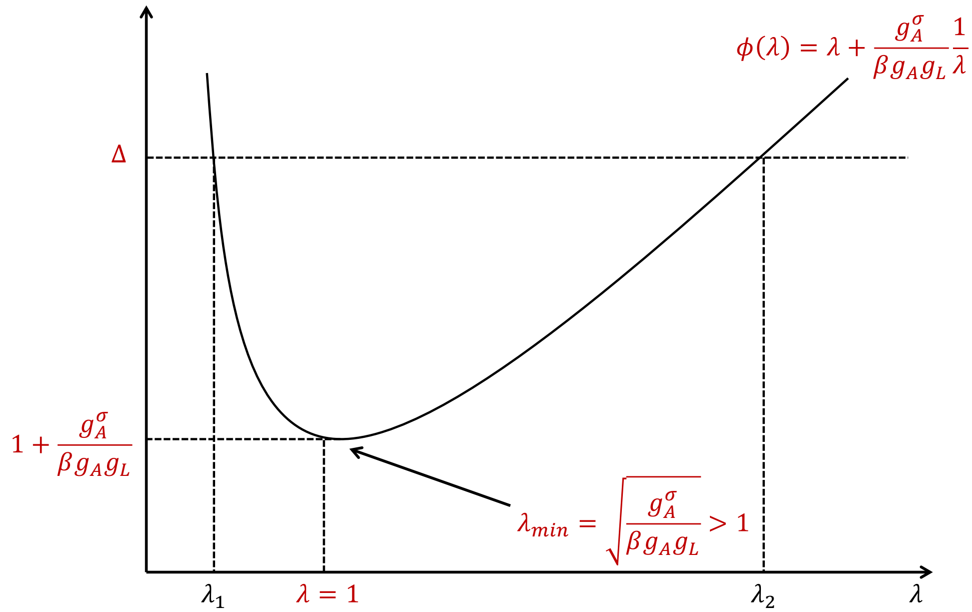
$$\det J = \lambda_1 \lambda_2 = \frac{g_A^\sigma}{\beta g_L g_A}$$
$$trJ = \lambda_1 + \lambda_2 = 1 + \frac{g_A^\sigma}{\beta g_L g_A} + \frac{\beta u' f''}{g_L g_A^{\sigma+1} u''}$$

- Entonces los autovalores resuelven:

$$\lambda + \frac{g_A^\sigma}{\beta g_L g_A}\frac{1}{\lambda} = \triangle$$

- Tendremos un autovalor $\lambda_1 < 1$ y el otro $\lambda_2 > 1$. Cuando esto ocurre tenemos una **Saddle Path**.

Método de Perturbación basado en la Factorización de Schur



Método de Perturbación basado en la Factorización de Schur

- Denotemos $\tilde{x}_t = T\tilde{X}_t$ y por tanto $\tilde{X}_t = T^{-1}\tilde{x}_t$.
- En el sistema de ecuaciones en diferencias lineal:

$$T^{-1}\tilde{x}_{t+1} = T^{-1}J\tilde{x}_t$$

  y por tanto:

$$\tilde{X}_{t+1} = T^{-1}JT\tilde{X}_t$$

- Si $T^{-1}JT$ es diagonal hemos desacoplado el sistema. Sabemos del álgebra lineal que:

$$JT = TS$$

- En la diagonal de S tenemos los autovalores de J y en la columnas de T tenemos los autovectores (generalizados) de J.
- Entonces:

$$\tilde{X}_{t+1} = S\tilde{X}_t$$

Método de Perturbación basado en la Factorización de Schur

- S es la factorización de Schur de J:

$$S = \begin{bmatrix} \lambda_1 & s_{12} \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

- Nota:
  - S desacopla el sistema.
  - La primera ecuación es $\tilde{X}_{1,t+1} = \lambda_1 \tilde{X}_{1,t} + s_{12}\tilde{X}_{2,t}$ y como $\lambda_1 < 1$ la variable $\tilde{X}_{1,t}$ es estable.
  - La segunda ecuación es $\tilde{X}_{2,t+1} = \lambda_2 \tilde{X}_{2,t}$ y como $\lambda_2 > 1$ la variable $\tilde{X}_{2,t}$ es explosiva. El único caso en que esto no ocurre es $\tilde{X}_{2,0} = 0$ (los bajo este caso se cumple la CTV).
- Recodemos:

$$\tilde{X}_t = T^{-1}\tilde{x}_t \Rightarrow \begin{bmatrix} \tilde{X}_{1,t} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^{11} & t^{12} \\ t^{21} & t^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{k}_t \\ \tilde{c}_t \end{bmatrix}$$

Método de Perturbación basado en la Factorización de Schur

- Entonces:

$$\begin{aligned} 0 &= t^{21}\tilde{k}_t + t^{22}\tilde{c}_t \\ \tilde{X}_{1,t} &= \left(t^{11} - \frac{t^{12}t^{21}}{t^{22}}\right)\tilde{k}_t \end{aligned}$$

- Usando el sistema anterior y $\tilde{X}_{1,t+1} = \lambda_1 \tilde{X}_{1,t}$ tenemos:

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{t+1} &= -\frac{t^{21}}{t^{22}}\tilde{k}_t \\ \tilde{k}_{t+1} &= \lambda_1 \tilde{k}_t \end{aligned}$$

- Estas dos ecuaciones permiten recuperar (aproximadamente) toda la secuencia $\left\{\tilde{c}_t, \tilde{k}_{t+1}\right\}_{t=0}^{\infty}$ a partir de que $\tilde{k}_0$.
- Son también denominadas reglas de decisión (o de política) $\tilde{c}_{t+1} = g_1(\tilde{k}_t)$ y $\tilde{k}_{t+1} = g_2(\tilde{k}_t)$, ya que resumen el comportamiento optimizador de los agentes.

Método de Perturbación basado en la Aproximación de las Funciones de Política

- De las CPO tenemos el siguiente sistema de ecuaciones en diferencias (no lineal):

$$\begin{aligned} \frac{g_A^{\sigma} u'(\hat{c}_t)}{\beta u'(\hat{c}_{t+1})} &- \left[f'(\hat{k}_{t+1}) + 1 - \delta\right] = 0 \\ g_L g_A \hat{k}_{t+1} &- f\left(\hat{k}_t\right) - (1-\delta)\hat{k}_t + \hat{c}_t = 0 \end{aligned}$$

- Este sistema se puede escribir implícitamente como:

$$F(c_{t+1}, c_t, k_{t+1}, k_t)$$

- La solución de este sistema, son dos funciones (denominadas funciones de política) que permiten recuperar la secuencia de consumo y capital:

$$\begin{aligned} \hat{c}_t &= g(\hat{k}_t) \\ \hat{k}_{t+1} &= h(\hat{k}_t) \end{aligned}$$

Método de Perturbación basado en la Aproximación de las Funciones de Política

- Podemos aproximar linealmente, alrededor del estado estacionario, las funciones de política:

$$\begin{aligned} \hat{c}_t &= g(\hat{k}^*) + g_{\hat{k}}(\hat{k}^*)(\hat{k}_t - \hat{k}^*) \\ \hat{k}_{t+1} &= h(\hat{k}^*) + h_{\hat{k}}(\hat{k}^*)(\hat{k}_t - \hat{k}^*) \end{aligned}$$

- El problema radica entonces en hallar las derivadas $g_k(k^*)$ y $h_k(k^*)$.
- Usando el sistema descrito en $F(\cdot)$ y las funciones de política:

$$F(g(h(\hat{k}_t)), g(\hat{k}_t), h(\hat{k}_t), \hat{k}_t) = F(\hat{k}_t) = 0$$

- Derivando el sistema de ecuaciones de las CPOs respecto de $\hat{k}$ y evaluando en el estado estacionario tenemos:

$$F_{\hat{k}}(\hat{k}^*) = f_{\hat{c}'} g_{\hat{k}} h_{\hat{k}} + f_{\hat{c}} g_{\hat{k}} + f_{\hat{k}'} h_{\hat{k}} + f_{\hat{k}} = 0$$

- Resolvemos el sistema de ecuaciones para hallar $g_{\hat{k}}$ y $h_{\hat{k}}$ como función de $(f_{\hat{c}'}, f_{\hat{c}}, f_{\hat{k}'}, f_{\hat{k}})$.

Programación Dinámica

Introducción

- Desarrollado por Richard Bellman (1957) y David Blackwell (1965)
- Para los economistas, las contribuciones de Sargent (1987) y Stokey y Lucas (1989) proporcionan el puente.
- Herramienta moderna para el análisis de economías dinámicas: aplicaciones en:
  - Macroeconomía, Economía Laboral, Finanzas, Organización Industrial, Teoría de Juegos, etc.
- Aplicable a modelos:
  - En tiempo discreto y tiempo contínuo.
  - Deterministicos y estocásticos.
  - Horizonte finito e infinito.
- Fundamentos del Método de Programación Dinámica:
  - El principio de optimalidad.
  - La ecuación de Bellman.

Introducción

- Hemos resuelto el modelo neoclásico de crecimiento usando un **enfoque de secuencias**.
  - La solución es un secuencia de objetos que satisfacen un conjunto de ecuaciones en diferencias.
- Un enfoque alternativo es utilizar un **enfoque recursivo**:
  - Programación dinámica.
- La idea básica de la programación dinámica es transformar un problema de optimización de muchos periodos en uno de optimización en dos periodos.
  - Para hacer esto resumiremos el futuro en la **función valor** (función de utilidad indirecta).
  - Intuición: La función valor es la máxima utilidad obtenida desde hoy dado el estado de la economía.

Fundamentos
Principio de Optimalidad

- El modelo neoclásico de crecimiento corresponde al siguiente problema secuencial general (PS)

$$\begin{aligned} v_{T+1}(x_0) &= \max_{\{x_{t+1}\}_{t=0}^{T}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t F(x_t, x_{t+1}) \\ & \quad s.t.\ x_{t+1} \in \Gamma(x_t),\ t = 0, 1, 2, ..., T \\ & \quad x_0 \in X \text{dado.} \end{aligned}$$

En esta formulación del problema, X es el conjunto factible, $0 < \beta < 1$ es el factor de descuento, $\Gamma(x_t)$ es la restricción (correspondencia).

Fundamentos
Principio de Optimalidad

Teorema (Principio de Optimalidad)
Sea $f(x, y) : X \times X^T \to \mathbb{R}$. *Entonces* (x^*, y^*) *es solución del problema*

$$\max_{x,y} f(x, y)$$

si y solo si (x^*, y^*) *es solución del problema*

$$\max_{x} \left(\max_{y} f(x, y) \right)$$

Descripción verbal: Bellman (1957)
Una decisión óptima tiene la propiedad, sin importar el estado inicial y la decisión, de que las decisiones siguientes son también óptimas en relación al estado resultante en la primera decisión.

Fundamentos
Del Principio de Optimalidad a la Ecuación de Bellman

- Apliquemos el principio de optimalidad al problema secuencial:

$$\begin{aligned}
v(x_0) &= \max_{\{x_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t F(x_t, x_{t+1}) \\
&= \max_{x_1, \{x_{t+1}\}_{t=1}^{\infty}} \left\{ F(x_0, x_1) + \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t F(x_t, x_{t+1}) \right\} \\
&= \max_{x_1} \left\{ F(x_0, x_1) + \max_{\{x_{t+1}\}_{t=1}^{\infty}} \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t F(x_t, x_{t+1}) \right\} \\
&= \max_{x_1} \left\{ F(x_0, x_1) + \beta \max_{\{x_{t+1}\}_{t=1}^{\infty}} \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} F(x_t, x_{t+1}) \right\}
\end{aligned}$$

- Nota: por un tema de espacio la restricción $x_{t+1} \in \Gamma(x_t)$ no fue escrita explícitamente.

Fundamentos

Del Principio de Optimalidad a la Ecuación de Bellman

- Definiendo:

$$v(x_1) = \max_{\{x_{t+1}\}_{t=1}^{\infty}} \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} F(x_t, x_{t+1}),$$

obtenemos la **Ecuación de Bellman** para $t = 0$

$$v(x_0) = \max_{x_1} \{F(x_0, x_1) + \beta v(x_1)\}$$

- Aplicando el PO a $v(x_1)$, la ecuación de Bellman para $t = 1$ es:

$$v_T(x_1) = \max_{x_2} \{F(x_1, x_2) + \beta v_{T-1}(x_2)\}$$

- Repitiendo el proceso, la ecuación de Bellman para cada t es

$$v(x_t) = \max_{x_{t+1}} \{F(x_t, x_{t+1}) + \beta v(x_{t+1})\}$$

Fundamentos

Formulación del Problema: Resumen

- Empezamos con un problema secuencial:

$$\begin{aligned} v(x_0) &= \max_{\{x_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t F(x_t, x_{t+1}) \\ & \quad s.t.\ x_{t+1} \in \Gamma(x_t),\ t = 0, 1, 2, ..., T. \end{aligned}$$

- Entonces lo expresamos en su forma equivalente en la ecuación Bellman:

$$v(x_t) = \max_{x_{t+1} \in \Gamma(x_t)} \{F(x_t, x_{t+1}) + \beta v(x_{t+1})\},$$

y ahora es un problema de decisión de dos períodos para cada t.
- Terminología:
  - x_t se denomina *estado*, *variables de estado*, o *vector estado* (si es multidimensional)
  - La solución $v(x_t)$ se denomina *función valor* para el período t
  - La solución $x_{t+1} = g(x_t)$ se denomina *función de política* o *regla de decisión* para el período t
- Ahora tenemos un **problema funcional** en lugar de uno de secuencias.

Fundamentos

Problema Secuencial con Variables de Estado y de Control

- En muchas aplicaciones, existen variables de elección que no son consideradas de estado y son denominadas *controles* (pueden ser cambiadas en t).
- La formulación de control óptimo del problema secuencial en este caso es:

$$v(x_0) = \max_{\{u_t, x_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t r(x_t, u_t)$$
$$s.t. \quad x_{t+1} = g(x_t, u_t),$$

donde x_t es el vector de estado y u_t es el vector de control.

- Aplicando el principio de optimalidad, el equivalente expresado en la ecuación de Bellman es:

$$v(x_t) = \max_{u_t, x_{t+1}} \{r(x_t, u_t) + \beta v(x_{t+1})\}$$
$$s.t. \ x_{t+1} = g(x_t, u_t)$$

- El objetivo es ahora es encontrar la función valor ($v(x_t)$) y las funciones de política ($u_t = h(x_t)$ y $x_{t+1} = g(x_t, h(x_t))$).

Fundamentos

Aspectos Prácticos de la Formulación del Problema

- La formulación de Problema de programación dinámica tiene ciencia y arte.
- La parte más difícil es distinguir e identificar las variables de estado y de control.
- ¿Cómo distinguirlas?
  - Ambos tipos de variables afectan directa o indirectamente (a través del set factible) el *payoff* corriente.
  - Las variables de estado son aquellas que **NO** se pueden cambiar en el período corriente.
  - Las variables de control son aquellas que **SI** se pueden cambiar en el período corriente.

Teorema (Teorema de la Envolvente)

Suponga que para cada x *la función* $f(x,\cdot):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *es derivable y que alcanza un máximo único en* $g(x)$ *que es una función derivable de* x*. Entonces, la función*

$$v(x) = \max_{y\in\Gamma(x)} f(x,y)$$

es derivable y tenemos que:

$$v'(x) = f_x(x,y^*) = f_x(x,g(x))$$

Regla del teorema de la envolvente: tratar las variables de elección en el óptimo como constantes al tomar las derivadas.

- Partimos de la ecuación de Bellman

$$v(x_t) = \max_{x_{t+1}\in\Gamma(x_t)} \left\{F(x_t,x_{t+1}) + \beta v(x_{t+1})\right\},$$

- CPO de la ecuación de Bellman

$$F_2(x_t,x_{t+1}) + \beta v'(x_{t+1}) = 0,$$

- Teorema de la envolvente:

$$\begin{aligned} v'(x_t) &= F_1(x_t,x_{t+1}) \\ v'(x_{t+1}) &= F_1(x_{t+1},x_{t+2}) \leftarrow Iterar\,adelante \end{aligned}$$

- Remplazar en la CPO para obtener la Ecuación de Euler

$$F_2(x_t,x_{t+1}) + \beta F_1(x_{t+1},x_{t+2}) = 0$$

Es una ecuación en diferencias de 2do orden (típicamente no lineal) con dos valores límite: x_0 dado y (CTV) $\lim_{t\to\infty}\beta^t F_x(x_t,x_{t+1})x_{t+1} = 0$.

Fundamentos
La Ecuación de Euler

- En caso de tener variables de control y de estado en el problema trabajamos con la Ecuación de Bellman y Lagrange.

$$\begin{aligned} v(x_t) &= \max_{u_t, x_{t+1}} \{r(x_t, u_t) + \beta v(x_{t+1})\} \\ & s.t.\ x_{t+1} = g(x_t, u_t) \end{aligned}$$

- El Lagrangiano es:

$$\ell = r(x_t, u_t) + \beta v(x_{t+1}) + \lambda[g(x_t, u_t) - x_{t+1}]$$

- Las CPO:

$$\begin{aligned} r_u(x_t, u_t) + \lambda g_u(x_t, u_t) &= 0 \\ \beta v'(x_{t+1}) - \lambda &= 0 \\ g(x_t, u_t) - x_{t+1} &= 0 \end{aligned}$$

Fundamentos
La Ecuación de Euler

Teorema de la envolvente:

$$v'(x_t) = \frac{\partial \ell}{\partial x_t} = r_x(x_t, u_t) + \lambda[g_x(x_t, u_t)]$$

Iterando la condición:

$$v'(x_{t+1}) = r_x(x_{t+1}, u_{t+1}) + \lambda[g_x(x_{t+1}, u_{t+1})]$$

Entonces las CPO quedan como:

$$\begin{aligned} r_u(x_t, u_t) + \lambda g_u(x_t, u_t) &= 0 \\ \beta r_x(x_{t+1}, u_{t+1}) + \lambda[\beta g_x(x_{t+1}, u_{t+1}) - 1] &= 0 \\ g(x_t, u_t) - x_{t+1} &= 0 \end{aligned}$$

Fundamentos
Métodos de Solución

Dos métodos generales de solución:

- Métodos basados en la Función Valor (funcionan en general)
  - Adivinar y Verificar la Función Valor.
  - Iteración de la Función Valor.
- Métodos basados en la Ecuación de Euler (funcionan sólo con problemas diferenciales)
  - Adivinar y Verificar la Función de Política.
  - Iteración de la función de política.
  - Métodos de Linealización (perturbación).

Fundamentos
Definición de Solución

- El problema de programación dinámica:

$$v\left(x_t\right) = \max_{x_{t+1}} \left\{F\left(x_t, x_{t+1}\right) + \beta v\left(x_{t+1}\right)\right\}$$

  es un problema funcional y por tanto su solución son las funciones:

$$[v(x), g(x)]$$

- Estas funciones resuelven la ecuación de Bellman en el siguiente sentido:
  - Dado $v(x)$, $g(x)$ resuelve el operador $\max$ de la ecuación de Bellman.
  - Dado $g(x)$, $v(x)$ resuelve:

$$v\left(x_t\right) = F\left(x_t, g(x_t) + \beta v\left(g(x_t)\right)\right)$$

Fundamentos

Métodos Basados en la Función Valor

- La ecuación de Bellman:

$$v\left(x_t\right)=\max_{x_{t+1}}\left\{F\left(x_t,x_{t+1}\right)+\beta v\left(x_{t+1}\right)\right\}$$

- Pregunta 1: ¿Cómo resolver la ecuación de Bellman para horizonte infinito?
- Pregunta 2: ¿Qué hace lo anterior posible?
- Restricción en horizonte infinito:
  - v LIE y LDE deben ser iguales:
  - Definición de *punto fijo* del operador T: $v=T\left(v\right)$ (mapeo en el espacio de funciones).
  - Buscamos el punto fijo del operador:

$$Tv=\max_{x_{t+1}}\left\{F\left(x_t,x_{t+1}\right)+\beta v\left(x_{t+1}\right)\right\}$$

- Dos Métodos:
  - Conjeturar y Verificar la Función Valor (*one shot method*): Encontrar $g(x_t)$ que resuelve la ecuación de Bellman dada la conjetura sobre $v(\cdot)$.
  - Iteración de la Función Valor (*iteration method*): $v_{j+1}\left(x\right)=\max_{x_{t+1}}\left\{F\left(x_t,x_{t+1}\right)+\beta v_j\left(x_{t+1}\right)\right\}$.

Fundamentos

Métodos Basados en la Ecuación de Euler

- Partimos de la ecuación de Bellman

$$v\left(x_t\right)=\max_{x_{t+1}\in\Gamma\left(x_t\right)}\left\{F\left(x_t,x_{t+1}\right)+\beta v\left(x_{t+1}\right)\right\}$$

  y la ecuación de Euler:

$$F_2\left(x_t,x_{t+1}\right)+\beta F_1\left(x_{t+1},x_{t+2}\right)=0$$

- La función de política es:

$$x_{t+1}=g(x_t)$$

- Dos Métodos:
  - Conjeturar y Verificar la Ecuación de Euler (*one shot method*): Encontrar $x_{t+1}=g_0(x_t)$ que resuelve la ecuación de Euler:

$$F_2\left(x_t,x_{t+1}\right)+\beta F_1\left(x_{t+1},g_0(x_{t+1})\right)=0\rightarrow x_{t+1}=g_1(x_t)$$

  .
  - Iteración de la Ecuación de Euler (*iteration method*): Iterar la ecuación anterior usando como conjetura la solución de la iteración anterior.

Representación Recursiva del Modelo Neoclásico de Crecimiento

El Problema del Planificador Central en PD

Ecuación de Bellman y CPOs

- El problema de optimización del planificador era (suponemos $g_L = g_A = 1$ por simplicidad):

$$\begin{aligned} \max_{\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \quad & \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \\ s.t. \quad & c_t + k_{t+1} = f(k_t) + (1-\delta)k_t \\ & k_0 \text{ dado.} \end{aligned}$$

- Alternativamente:

$$\max_{\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \quad \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(f(k_t) + (1-\delta)k_t - k_{t+1})$$

- La ecuación de Bellman es:

$$v(k_t) = \max_{k_{t+1}} \{u(f(k_t) + (1-\delta)k_t - k_{t+1}) + \beta v(k_{t+1})\}$$

y su función de política $k_{t+1} = g(k_t)$.

El Problema del Planificador Central en PD
Ecuación de Bellman y CPOs

- Para encontrar la ecuación de Euler encontramos la CPO la ecuación de Bellman:

$$-u'\left(f\left(k_t\right)+(1-\delta)k_t-k_{t+1}\right)+\beta v'\left(k_{t+1}\right)=0$$

- Usando el teorema de la envolvente:

$$v'(k_t)=u'\left(f\left(k_t\right)+(1-\delta)k_t-k_{t+1}\right)\left[f'\left(k_t\right)+(1-\delta)\right]$$

- Entonces las condiciones de equilibrio son:

$$u'\left(f\left(k_t\right)-k_{t+1}\right)=\beta u'\left(f\left(k_{t+1}\right)+(1-\delta)k_{t+1}-k_{t+2}\right)\left[f'\left(k_t\right)+(1-\delta)\right]$$

y la CTV $\lim_{t\to\infty}\beta^t u'(c_t)k_{t+1}=0$.

El Problema del Planificador Central en PD
Ecuación de Bellman y CPOs

- Alternativamente podemos usar la siguiente representación recursiva del problema:

$$\begin{aligned} v\left(k_t\right) &= \max_{\left\{c_t,k_{t+1}\right\}}\left\{u\left(c_t\right)+\beta v\left(k_{t+1}\right)\right\} \\ & \quad s.t.\ \ c_t+k_{t+1}=f\left(k_t\right)+\left(1-\delta\right)k_t \end{aligned}$$

- Como tenemos un problema de optimización restringida utilizamos el método de Lagrange:

$$\ell=u\left(c_t\right)+\beta v\left(k_{t+1}\right)+\lambda[f\left(k_t\right)+\left(1-\delta\right)k_t-c_t-k_{t+1}]$$

- Las CPO:

$$\begin{aligned} u'(c_t)-\lambda &= 0 \\ \beta v'(k_{t+1})-\lambda &= 0 \\ f\left(k_t\right)+\left(1-\delta\right)k_t-c_t-k_{t+1} &= 0 \end{aligned}$$

El Problema del Planificador Central en PD

Ecuación de Bellman y CPOs

- Usamos el teorema de la envolvente:

$$v'(k_t) = \frac{\partial \ell}{\partial k_t} = \lambda[f'(k_t) + (1-\delta)] = u'(c_t)[f'(k_t) + (1-\delta)]$$

- Combinamos las CPO y la condición envolvente:

$$u'(c_t) = \beta v'(k_{t+1})$$
$$u'(c_t) = \beta u'(c_{t+1})[f'(k_{t+1}) + (1-\delta)]$$

- Completamos esta condición de equilibrio con la restricción de recursos y la CTV:

$$c_t + k_{t+1} = f(k_t) + (1-\delta) k_t$$
$$\lim_{t\to\infty} \beta^t u'(c_t) k_{t+1} = 0$$

El Problema del Planificador Central en PD

Solución I: Conjeturar y Verificar la Función Valor

- Ejemplo: Modelo con utilidad logarítmica y depreciación completa:

$$\begin{aligned} u(c) &= \ln c \\ f(k) &= Ak^{\alpha}, \end{aligned}$$

- Ecuación de Bellman:

$$v(k) = \max_{0<k'<Ak^{\alpha}} \left\{ \ln\left(Ak^{\alpha} - k'\right) + \beta v\left(k'\right) \right\}$$

- Conjetura sobre la solución:

$$v(k) = E + F \ln k$$

- Reemplazando en la ecuación de Bellman:

$$v(k) = \max_{0<k'<Ak^{\alpha}} \left\{ \ln\left(Ak^{\alpha} - k'\right) + \beta\left(E + F\ln k'\right) \right\}$$

Solución:

$$k' = \frac{\beta F}{1+\beta F} Ak^{\alpha}$$

El Problema del Planificador Central en PD

Solución I: Conjeturar y Verificar la Función Valor

- La ecuación de Bellman se convierte en:

$$
\begin{aligned}
& v(k) = \ln\left(Ak^{\alpha} - k'\right) + \beta\left(E + F\ln k'\right) \\
\Longrightarrow \quad & E + F\ln k = \ln\left(\frac{1}{1+\beta F}Ak^{\alpha}\right) + \beta\left(E + F\ln\left(\frac{\beta F}{1+\beta F}Ak^{\alpha}\right)\right) \\
\Longrightarrow \quad & E + F\ln k = \left[\ln\left(\frac{1}{1+\beta F}A\right) + \beta E + \beta F\ln\left(\frac{\beta F}{1+\beta F}A\right)\right] \\
& \qquad + \alpha\left(1+\beta F\right)\ln k
\end{aligned}
$$

- La solución satisface:

$$
\begin{aligned}
& E = \ln\left(\frac{1}{1+\beta F}A\right) + \beta E + \beta F\ln\left(\frac{\beta F}{1+\beta F}A\right), F = \alpha\left(1+\beta F\right) \\
\Longrightarrow \quad & E = \frac{1}{1-\beta}\left[\ln\left(A\left(1-\alpha\beta\right)\right) + \frac{\alpha\beta}{1-\alpha\beta}\ln\left(A\alpha\beta\right)\right], F = \frac{\alpha}{1-\alpha\beta}
\end{aligned}
$$

- Note que $k' = \frac{\beta F}{1+\beta F}Ak^{\alpha} = \alpha\beta Ak^{\alpha}$.

El Problema del Planificador Central en PD

Solución II: Iterar la Función Valor

- Empezar con una conjetura arbitraria. La más sencilla es:

$$v_0(k) = 0, \forall k \in X$$

y por tanto la ecuación de Bellman sería:

$$v_1(k) = \max_{0<k'<Ak^{\alpha}} \ln\left(Ak^{\alpha} - k'\right) + \beta v_0\left(k'\right) = \max_{0<k'<Ak^{\alpha}} \ln\left(Ak^{\alpha} - k'\right)$$

- Solución:

$$v_1(k) = \ln A + \alpha\ln k$$

- Iterar

$$v_2(k) = \max_{0<k'<Ak^{\alpha}} \ln\left(Ak^{\alpha} - k'\right) + \beta v_1\left(k'\right)$$

- Continuar hasta obtener convergencia.

Nota: Si el problema tiene solución analítica, después de dos iteraciones se debería tener la conjetura adecuada, ahí cambiar al método Conjeturar y Verificar.

El Problema del Planificador Central en PD

Solución III: Conjeturar y Verificar la Función de Política

- Para cualquier función de política dada $k_{t+2} = g(k_{t+1})$, es posible encontrar la función de política:

$$k_{t+1} = \widehat{g}(k_t)$$

como solución de la ecuación de Euler:

$$u'(f(k_t) - k_{t+1}) = \beta u'(f(k_{t+1}) - g(k_{t+1})) f'(k_{t+1})$$

- Como en el caso del método basado en la Función Valor, la solución es un punto fijo:

$$\widehat{g}(k) = g(k).$$

- La ecuación de Euler del problema es:

$$EE: \frac{1}{Ak_t^{\alpha} - k_{t+1}} = \beta \frac{\alpha A k_{t+1}^{\alpha-1}}{Ak_{t+1}^{\alpha} - k_{t+2}}$$

Fundamentos

Solución III: Conjeturar y Verificar la Función de Política

- Conjetura de solución:

$$g(k) = sAk^{\alpha}$$

- Reemplazamos en la ecuación de Euler:

$$\frac{1}{Ak_t^{\alpha} - k_{t+1}} = \beta \frac{\alpha A k_{t+1}^{\alpha-1}}{Ak_{t+1}^{\alpha} - sAk_{t+1}^{\alpha}}$$

$$\Longrightarrow \quad k_{t+1} = \frac{\alpha\beta}{1 - s + \alpha\beta} Ak_t^{\alpha}$$

- El punto fijo requiere de

$$\frac{\alpha\beta}{1 - s + \alpha\beta} = s$$

de tal manera que $s = \alpha\beta$ (ignorando la solución alternativa $s = 1$).

El Problema del Planificador Central en PD

Solución IV: Iterar la Función de Política

- Empezar con cualquier función, digamos,

$$k' = g_0(k) = 0,$$

- En general, para $j = 0, 1, 2...$, resolver $k_{t+1} = g_{j+1}(k_t)$ como en el método *Conjeturar y Verificar*.

$$\frac{1}{Ak_t^{\alpha} - k_{t+1}} = \beta \frac{\alpha A k_{t+1}^{\alpha-1}}{Ak_{t+1}^{\alpha} - g_j(k_{t+1})}.$$

- Si $g_{j+1}(k) = g_j(k)$ la solución fue encontrada; caso contrario continuar la iteración.

Nota: El proceso iterativo puede proveer una buena conjetura respecto de la forma funcional en el método Conjeturar y Verificar.

El Problema del Planificador Central en PD

Casos con Solución Analítica

- Tres casos con solución analítica exacta:

$$u(c_t) = \ln(c_t), \ f(k_t) = A_t k_t^{\alpha},$$

$$u(c_t) = \frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma}, \ f(k_t) = A_t k_t + (1-\delta) k_t,$$

$$u(c_t) = -\frac{1}{2}(c_t - \overline{c})^2, \ f(k_t) = A_t k_t + (1-\delta) k_t,$$

- Todos estos casos pueden ser resueltos mediante *Conjeturar y Verificar*.
- Si el problema no admite solución analítica, los métodos iterativos proveen un procedimiento general para hallar la aproximación numérica.
- Métodos de linealización representan un punto medio con solución también aproximada.

El Equilibrio Competitivo Recursivo

- El *equilibrio competitivo recursivo* es una forma alternativa de representar el equilibiro competitivo de forma consistente con el enfoque de programación dinámica.
  - En PD todo el problema es escrito como función de variables de estado.
  - No existen secuencias, el problema de optimización es de dos periodos.
- Este enfoque es particularmente útil en los siguientes contextos:
  - Modelo con incertidumbre donde no podemos asumir que los agentes toman los precios futuros como dados.
  - Modelos con agentes heterogéneos donde la distribución de familias es una variable de estado.
- Ingredientes en la representación recursiva:
  - Todo en la economía depende de las **variables de estado**.
  - Los agentes necesitan conocer las **leyes de movimiento** de las variables de estado para formarse una idea del futuro (ejemplo, para el retorno del capital usan $q = f'(k)$).
  - Las **funciones de política** dependen de dichas leyes de movimiento.
  - Las leyes de movimiento son **consistentes** (dependen) con las funciones de política de los agentes.

El Equilibrio Competitivo Recursivo

El Modelo Neoclásico de Crecimiento

- **Notación:** ahora vamos a usar mayúsculas para denotar variables agregadas y minúsculas para denotar variables individuales.
- La variables de estado de la economía es κ (el stock agregado de capital per capita).
- La ley de movimiento del capital agregado es

$$\kappa' = \varphi(\kappa)$$

  que es una función desconocida y es determinada como parte del equilibrio.
- La solución del problema de optimización de las familias es

$$k' = h(k, \kappa)$$
$$c = g(k, \kappa)$$

  y depende del estado individual (privado) k y del estado agregado κ.
- La solución del problema de las firmas son los precios:

$$q(\kappa) \ y \ w(\kappa)$$

- Note que en el modelo de agente representativo la distinción entre k y κ es irrelevante.

El Equilibrio Competitivo Recursivo
Familias

- El problema de optimización de las familias es elegir la secuencia$\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ dada la secuencia $\{q_t(\kappa_t), w_t(\kappa_t)\}_{t=0}^{\infty}$ y las restricciones de recursos.

$$\max_{\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$
$$s.a\ c_t + k_{t+1} = (1 + q_t(\kappa_t) - \delta)k_t + w_t(\kappa_t)$$
$$k_0\ dado$$

  Note que el problema de las familias tiene un estado individual k_t y uno agregado κ_t.

- Representación recursiva: Las familias eligen c y k' dadas las funciones de precios $q(\kappa)$ y $w(\kappa)$ y la restricción de recursos.

$$v(k, \kappa) = \max_{c,k'} \{u(c) + \beta v(k', \kappa')\}$$
$$s.a\ c + k' = (1 + q(\kappa) - \delta)k + w(\kappa)$$

  con $\kappa' = \varphi(\kappa)$. La solución de este problema es $k' = h(k, \kappa)$ y $c = g(k, \kappa)$.

El Equilibrio Competitivo Recursivo
Firmas

- Las firmas arriendan capital y servicios laborales de las familias, tomando los precios de arriendo (q, w) como dados.
- Las firmas maximizan los beneficios corrientes:

$$\max F(K, L) - wL - qK$$

- Recordemos que las condiciones de este problema son:

$$F_K(K, L) = f'(\kappa) = q(\kappa)$$
$$F_L(K, L) = f(\kappa) - f'(\kappa)\kappa = w(\kappa)$$

Objetos:

- Funciones de precios $[q(\kappa), w(\kappa)]$
- Ley de movimiento del capital agregado: $\kappa' = \varphi(\kappa)$
- Funciones de política $k' = h(k, \kappa)$ y $c = g(k, \kappa)$ y función valor $v(k, \kappa)$.

Condiciones de equilibrio:

- Dados $\varphi(\kappa), q(\kappa), w(\kappa)$, las funciones de política resuelven el problema de PD de las familias.
- Las funciones de precios $q(\kappa)$ y $w(\kappa)$ satisfacen las condiciones de primer orden de las firmas.
- Los mercados se clarea: relación entre k y κ (agregación).
- Lo que esperan las familias es consistente con su comportamiento:

$$h(\kappa, \kappa) = \varphi(\kappa)$$